

Adı Soyadı:

24.06.2022

Numara:

**MAT 204 ANALİTİK GEOMETRİ II DERSİ FİNAL SINAVI SORULARI**

- 1)  $4x^2 - 4xy + y^2 + 8x - 2y = 0$  koniğinin  $P(1,2)$  noktasına göre kutup doğrusunu bulunuz.
- 2)  $x^2 + 4y^2 - 4 = 0$  denklemlerle merkezli koniğin odak, doğrultman ve dış merkezliğini bulunuz.
- 3)  $x^2 + y^2 + 6x - 8 = 0$  koniğine  $A(1,-1)$  noktasından çizilen teğetin denklemini bulunuz.
- 4)  $(1,6)$ ,  $(-3,-2)$ ,  $(-5,0)$ ,  $(3,4)$  ve  $(0,10)$  noktalarından geçen koniğin denklemini bulunuz.
- 5) Aşağıdaki kuadriklerin çeşidini belirleyiniz.
  - a)  $3x^2 + 2y^2 - 4z = 0$
  - b)  $x^2 + 6y^2 - 1 = 0$
  - c)  $x^2 + y^2 - 4z^2 = 0$
  - d)  $-4x^2 + y^2 + 2z^2 + 1 = 0$
  - e)  $x^2 + 4y^2 + 2z^2 - 2 = 0$
- 6) Orijin etrafında  $\frac{\pi}{4}$  radyanlık dönmenin denklemini yazarak  $(\sqrt{2}, -\sqrt{2})$  noktasının esasını bulunuz.
- 7)  $y - x - 2 = 0$  doğrusuna göre yansımanın denklemini yazınız.

**Not: Süre 90 dakikadır.**

**Prof. Dr. Emin KASAP**

= CEVAP ANAHTARI =

1)  $Ax^2 + Bxy + Cy^2 + Dx + Ey + F = 0$  genel denkleminin  $P$  noktasına göre kutup doğrusunun denklemi  $\Phi(x,y) = Ax^2 + Bxy + Cy^2 + Dx + Ey + F$  olmak üzere

$$\Phi_x|_P \cdot x + \Phi_y|_P \cdot y + D \cdot x(P) + E \cdot y(P) + 2F = 0$$

birimindedir. Burada  $\Phi(x,y) = 4x^2 - 4xy + y^2 + 8x - 2y$  ve  $P(1,2)$  olup

$$\Phi_x = 8x - 4y + 8, \quad \Phi_y = -4x + 2y - 2 \text{ olur. Böylece}$$

$$\Phi_x|_P = 8, \quad \Phi_y|_P = -2, \quad x(P) = 1, \quad y(P) = 2$$

olduğundan kutup doğrusunun denklemi

$$8x - 2y + 4 = 0$$

bulunur.

$$2) \quad x^2 + 4y^2 - 4 = 0 \Rightarrow x^2 + 4y^2 = 4 \Rightarrow \frac{x^2}{4} + y^2 = 1$$

merkezi eliptir.  $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$  genel denklemine göre

$$a^2 = 4, \quad b^2 = 1 \text{ olup } c^2 = a^2 - b^2 \Rightarrow c^2 = 3 \Rightarrow c = \pm\sqrt{3} \text{ olur.}$$

Böylece bu elipsin odak noktaları  $F_1(-\sqrt{3}, 0)$  ve  $F_2(\sqrt{3}, 0)$  dir.

$F_1$  noktasına karşılık gelen doğrultman  $x = -\frac{4}{\sqrt{3}}$  dir.

$F_2$  noktasına karşılık gelen doğrultman  $x = \frac{4}{\sqrt{3}}$  dir.

Bu elipsin dış merkezliği  $e = \frac{\sqrt{3}}{2}$  bulunur.

3)  $A(1, -1)$  noktasından geçen doğrusal

$$y+1 = m(x-1) \Rightarrow y = mx - m - 1$$

biçimindedir. Bu doğrusalın denklemini ile konik denklemini ortak çözümlerse

$$x^2 + m^2 x^2 - 2m^2 x + m^2 - 2mx + 2m + 1 + 6x - 8 = 0$$

$$\Rightarrow (1+m^2)x^2 + (6 - (2m^2+2m))x + m^2 + 2m - 7 = 0$$

olur. Bu son denklemin  $\Delta$  diskriminantı için

$$\Delta = 36 - 24m^2 - 24m + 4m^4 + 8m^3 + 4m^2 - (4+4m^2)(m^2+2m-7) = 0$$

$$\Rightarrow 36 - 20m^2 + 8m^3 + 4m^4 - 24m - 4m^2 - 8m + 28 - 4m^4 - 8m^3 + 28m^2 = 0$$

$$\Rightarrow 4m^2 - 32m + 64 = 0$$

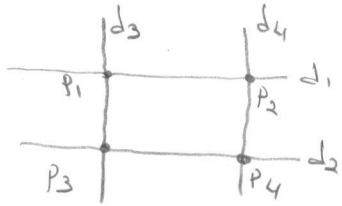
$$\Rightarrow m^2 - 8m + 16 = 0 \Rightarrow (m-4)^2 = 0 \Rightarrow m = 4$$

bulunur. 0 halde

$$y+1 = 4(x-1) \Rightarrow d \dots 4x - y - 5 = 0$$

$A(1, -1)$  noktasından geçen teğet doğrusunun denklemdir.

4)  $P_1(1, 6)$ ,  $P_2(-3, -2)$ ,  $P_3(-5, 0)$ ,  $P_4(3, 4)$  ve  $P_5(0, 10)$  olsun.



$P_1 - P_2$  den geçen doğru  $d_1$  olduğuna göre  $m_{d_1} = \frac{-8}{-4} = 2$

$$\Rightarrow d_1 \dots y - 6 = 2(x - 1) \Rightarrow d_1 \dots 2x - y + 4 = 0$$

$P_3 - P_4$  den geçen doğru  $d_2$  olduğuna göre  $m_{d_2} = \frac{4}{8} = \frac{1}{2}$

$$\Rightarrow d_2 \dots y = \frac{1}{2}(x+5) \Rightarrow d_2 \dots x - 2y + 5 = 0$$

olur.  $\Phi(x, y) = d_1 \cdot d_2 = 0$  konisini bulalım.

$$\Phi(x, y) = (2x - y + 4)(x - 2y + 5) = 0$$

$$\Rightarrow \Phi(x, y) = 2x^2 - 4xy + 10x - xy + 2y^2 - 5y + 4x - 8y + 20 = 0$$

$$\Rightarrow \Phi(x, y) = 2x^2 - 5xy + 2y^2 + 14x - 13y + 20 = 0$$

bulunur

4. ceva bin deomi)

$P_1 - P_3$  den geçen doğru  $d_3$  olmaktadır üzere  $m_{d_3} = \frac{-6}{-6} = 1$

$$\Rightarrow d_3 \dots y = x + 5 \Rightarrow d_3 \dots x - y + 5 = 0$$

öbür.

$P_2 - P_4$  den geçen doğru  $d_4$  olmaktadır üzere  $m_{d_4} = \frac{6}{6} = 1$

$$\Rightarrow d_4 \dots y + 2 = x + 3 \Rightarrow d_4 \dots x - y + 1 = 0$$

öbür.  $\Phi_2(x, y) = d_1 \cdot d_2 = 0$  korigini bulalım

$$\Phi_2(x, y) = (x - y + 5)(x - y + 1) = 0$$

$$\Rightarrow \Phi_2(x, y) = x^2 - xy + x - xy + y^2 - y + 5x - 5y + 5 = 0$$

$$\Rightarrow \Phi_2(x, y) = x^2 - 2xy + y^2 + 6x - 6y + 5 = 0$$

bulunur.  $\lambda \in \mathbb{R}$  olmaktadır üzere  $\Phi_1 + \lambda \Phi_2 = 0$  kait arkesinin denklemi

$$(2 + \lambda)x^2 + (-5 - 2\lambda)xy + (2 + \lambda)y^2 + (14 + 6\lambda)x + (-13 - 6\lambda)y + 20 + 5\lambda = 0$$

birimindedir.  $P_5(0, 10)$  noktası bu denklemi sağlanmalıdır. 0 holde

$$(2 + \lambda) \cdot 100 + (-13 - 6\lambda) \cdot 10 + 20 + 5\lambda = 0$$

$$\Rightarrow (2 + \lambda) \cdot 20 + (-13 - 6\lambda) \cdot 2 + 4 + \lambda = 0$$

$$\Rightarrow 3\lambda + 18 = 0$$

$$\Rightarrow \lambda = -2$$

öbür.  $\lambda = -2$  aile denkleminde yazılır bu 5 noktadan geçen

korigin denklemi

$$-xy + 2x - y + 10 = 0 \Rightarrow xy - 2x + y - 10 = 0$$

elde edilir

5) a)  $3x^2 + 2y^2 - 4z = 0 \Rightarrow \frac{x^2}{\frac{1}{3}} + \frac{y^2}{\frac{1}{2}} = 4z$  eliptik paraboloid

b)  $x^2 + 6y^2 - 1 = 0 \Rightarrow x^2 + \frac{y^2}{\frac{1}{6}} = 1$  eliptik silindir

c)  $x^2 + y^2 - 4z^2 = 0 \Rightarrow \frac{x^2}{1} + \frac{y^2}{1} - \frac{z^2}{\frac{1}{4}} = 0$  eliptik koni (koni)

d)  $-4x^2 + y^2 + 2z^2 + 1 = 0 \Rightarrow \frac{x^2}{\frac{1}{4}} - \frac{y^2}{1} - \frac{z^2}{\frac{1}{2}} = 1$  iki taraflı hiperboloid

e)  $x^2 + 4y^2 + 2z^2 - 2 = 0 \Rightarrow \frac{x^2}{2} + \frac{y^2}{\frac{1}{2}} + z^2 = 1$  elipsoid

6) 
$$\begin{cases} x' = x \cos d - y \sin d \\ y' = x \sin d + y \cos d \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x' = \frac{1}{\sqrt{2}}(x-y) \\ y' = \frac{1}{\sqrt{2}}(x+y) \end{cases} \text{ olur.}$$

$(x', y') = (\sqrt{2}, -\sqrt{2}) \Rightarrow \begin{cases} \sqrt{2} = \frac{1}{\sqrt{2}}(x-y) \\ -\sqrt{2} = \frac{1}{\sqrt{2}}(x+y) \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 2 = x-y \\ -2 = x+y \\ \hline x=0, y=-2 \end{cases}$

olur.  $(\sqrt{2}, -\sqrt{2})$  nin esası  $(0, -2)$  bulunur.

7)  $y = x + 2$  için yansıma denklemini bulalım. Genel yansıma denklemini

$$\begin{cases} x' = x \cos 2d + y \sin 2d + 2p \cos \theta \\ y' = x \sin 2d - y \cos 2d + 2p \sin \theta \end{cases} \text{ biçimindedir.}$$

Burada  $d = \frac{\pi}{4}$ ,  $\theta = \frac{3\pi}{4}$ ,  $p = \sqrt{2}$  dir.

0 halde yansıma denklemini

$$\begin{cases} x' = y - 2 \\ y' = x + 2 \end{cases}$$

bulunur.

